



TITLE:

低レイノルズ数乱れの非線型性 (流体力学における非線型問題)

AUTHOR(S):

大路, 通雄

CITATION:

大路, 通雄. 低レイノルズ数乱れの非線型性 (流体力学における非線型問題). 数理解析研究所講究録 1973, 185: 112-125

ISSUE DATE:

1973-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107189>

RIGHT:

低レイノルズ数乱れの非線型性

信州大 工 大 路 通 雄

レイノルズ数は流体運動の非線型項と粘性項との比を表わすから、非線型現象としての乱れの研究に伴う困難が高レイノルズ数の場合に最も著しいことは当然であるが、レイノルズ数が低いときにもその非線型効果は必ずしも単純でないことを、とくにBurgersモデルについて具体的に示す。

1. 問題の背景

1.1 前期理論

ちょうど20年前、G. K. Batchelor (1953) はその有名なテキストの中で、直接運動方程式から導かれる結果としては、*permanence of big eddies* と *final period of decay* だけが理論的に確立されたものであると述べた。これに先立って、Kármán (1937), Taylor (1937), Kármán-Howarth (1938), Millionshtchikov (1939), Loitsiansky (1939), Lin (1948), Batchelor-Townsend (1948)

などの一様等方な乱れに関する一連の研究があり, Batchelor (1946), Chandrasekhar (1950) は軸対称な場合に拡張したが, それらのすべてを含む上記 Batchelor の表現は場の対称性にかかわらず一般の一様な非圧縮乱れに対する美しい形をもっており, 次のように要約できる:

1° エネルギー・スペクトル・テンソル $\Phi_{ij}(\mathbf{x}; t)$ は $\mathbf{x} = 0$ の近くで

$$\Phi_{ij}(\mathbf{x}; t) = \kappa_l \kappa_m C_{ijlm} + O(\kappa^3) \quad (1)^*$$

のように展開され, かつ

$$\frac{d}{dt} C_{ijlm} = 0 \quad (2)$$

である (大域構造の解析性 \rightarrow permanence of big eddies).

2° 減衰時間 t_0 十分大きいとき, スペクトル方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu\kappa^2\right)\Phi_{ij}(\mathbf{x}; t) = 0 \quad (3)$$

に帰着し, これから (1) を考慮して

$$\Phi_{ij}(\mathbf{x}; t) \sim \kappa_l \kappa_m C_{ijlm} e^{-2\nu\kappa^2(t-t_0)} \rightarrow \overline{u^2} \propto (t-t_0)^{-5/2} \quad (4)$$

(final period of decay \rightarrow $-5/2$ 乗減衰法則).

にもかかわらず, 事情はこれ程簡単でないことがその後次第に明らかとなって, 問題はまた振出しに戻る.

1.2 大域構造理論の修正

まず 1° に対して運動学的な立場から Birkhoff (1954) から, 準

* 動径スペクトル関数 $E(\kappa; t)$ に対しては, Loitsiansky の不変量を Λ として, $E(\kappa; t) = \Lambda \kappa^4 + O(\kappa^5)$.

正規モデルの計算から Proudman-Reid (1954) がそれぞれ疑問を投じた。要するに $\kappa=0$ で $\Phi_{ij}(\kappa, t)$ の解析性を天下りに仮定することへの批判であるが、これを具体化して (1) の代りに

(i) Batchelor-Proudman (1956) の式:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ij}(\kappa; t) &= \Delta_{il} \Delta_{jm} \kappa_m \kappa_p C_{lmnp}(t) + O(\kappa^3 \ln \kappa), \\ (E(\kappa; t) &= \Lambda(t) \kappa^4 + O(\kappa^5 \ln \kappa)), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(ii) Saffman (1967) の式:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{ij}(\kappa; t) &= \Delta_{il} \Delta_{jm} M_{em} + O(\kappa), \\ (E(\kappa; t) &= B \kappa^2 + O(\kappa^3)) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が求められる。ただし

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2}$$

である。(i) は圧力の遠距離効果を考慮したもので、このとき C_{lmnp} (又は Λ) は不変量でない。(ii) はそれと初期条件が異なり、上の効果はマスクされて M_{em} (又は B) は不変量となるが、 Λ は発散する。両者を一般化して、かつ減衰終期の方程式 (3) はそのまま用いると、

$$\kappa \rightarrow 0 \text{ で } \Phi_{ij}(\kappa; t) = \Delta_{il} \Delta_{jm} O(\kappa^\lambda) ; \quad 0 \leq \lambda \leq 2 \quad (7)$$

$$t \rightarrow \infty \text{ で } \overline{u^2} \propto (t - t_0)^{-\frac{\lambda+3}{2}} \quad (8)$$

を得る。 $\lambda=2$ は (i), $\lambda=0$ は (ii) の場合にほかならない。

一様でない乱れに対する類似の取扱いは Phillips (1956) によって行なわれた。

1.3 レイノルズ数展開理論

それでは1.1の2°, 従って終期方程式(3)は自明であろうか? 本稿の関心はむしろこの問題にあるが, 事の起りは終期解を弱い非線型性で修正しようとする Deissler (1958, 1960) の試みであった。しかし非線型項の処理が適切でなかったため, 筆者(1963) * Monin (1964) はあらかじめ弱い乱れの理論を定式化し, $N+1$ 次キュムラントのスペクトルに対し, 無次元形で

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\alpha^{(N)} \right) \Phi_{ij \dots g}(\theta_b^{(1)}, \dots, \theta_b^{(N)}; t) \\ &= L R_0 \sum_c^{(N+1)} \left[\sigma_\alpha^{(N)} \Delta_{i\beta}(\sigma^{(N)}) \Psi_{(\beta\alpha)j \dots g}(\theta_b^{(1)}, \dots, \theta_b^{(N)}; t) \right]; \\ & \Psi_{(\beta\alpha)j \dots g}(\theta_b^{(1)}, \dots, \theta_b^{(N)}; t) \\ &= \int_{\theta_b^{(N+1)}} \Phi_{\beta j \dots g \alpha}(\theta_b^{(1)}, \dots, \theta_b^{(N+1)}) d\theta_b^{(N+1)} + T_{(\beta\alpha)j \dots g}(\theta_b^{(1)}, \dots, \theta_b^{(N)}; t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

を与えている。ただし,

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(N)} &= -(\theta_b^{(1)} + \dots + \theta_b^{(N)}), \\ \alpha^{(N)} &= (\theta_b^{(1)})^2 + \dots + (\theta_b^{(N)})^2 + (\sigma^{(N)})^2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

R_0 はレイノルズ数, $\sum_c^{(N+1)}$ は [] 内の変数の内置換による $N+1$ 項の和を表わす。 (9), (10) で $N=1$, $R_0 \rightarrow 0$ とすれば (3) になり, $R_0 \neq 0$ の小さいときは, R_0 についてのべき級数展開

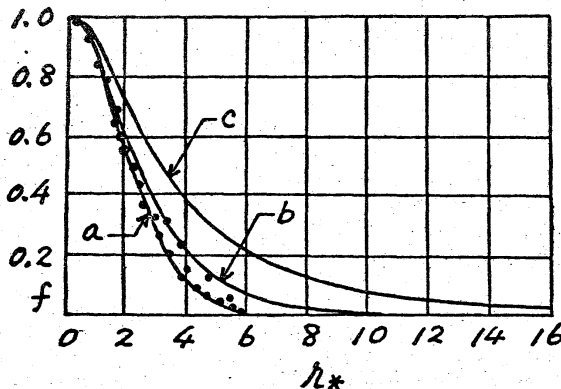
$$\Phi_{ij \dots g} = \sum_{s=0}^{\infty} R^s \Phi_{ij \dots g}^{(s)} \quad (11)$$

* T は N 次以下のスペクトルを種々に組合せた積和。 Deissler の計算では Ψ に対する T の寄与が全く無視されている。

を導入して原理上(9)を初期値問題の形で解くことができる。
 実際の計算は非常に煩雑なため、直接の研究は乏しいが、後述のBurgersモデルによる結果から推すと、恐らくこの方式はうまく終期解につながるからない。その意味で1.1, 2.0の内容もまた無条件にはうけ入れにくいように思われる。

1.4 実験事実

一般にこの種の問題の実験的研究はむづかしいが、減衰終期に対してはBatchelor-Townsend(1948)の風洞による測定がよく知られている。おもな結果は、 $-5/2$ 乗法則(4)が漸近的に成り立つこと、およびこれに対応する等方的縦相関係数



$$f(\lambda_*) = e^{-\lambda_*^2/8}; \quad (12)$$

$$\lambda_* = \lambda / \sqrt{\nu(t-t_0)}$$

が実験的にもほぼ認められたことであった。エネルギースペクトル(5)のように修正さ

Fig. 1 減衰終期の等方性縦相関係数

- a) 理論式(12) [←(4)と(5)]。B-T(1948)
- b) 同修正式 [←(6)] の実験実
- c) 実験式(14)

れたときにも $-5/2$ 乗減衰と(12)は変りかない。同じく(6)のよ

うに修正した場合 $-3/2$ 乗減衰を期待され、一方 f の形は裾野で少しちかってくるが、実験実とは両者の中間に分布している (Fig. 1, a, b).

これに対し、水路における最近のLing-Huan(1970)の実験

($Re_\lambda = 3 \sim 30$) は, エネルギーの減衰について

$$\overline{u^2} \propto (t - t_0)^{-2} \quad (-2 \text{乗法則}), \quad (13)$$

f について

$$f(\lambda_*) = \frac{1}{1 + (\lambda_*/\alpha)^2} \quad ; \quad \alpha \approx 3.2 \quad (14)$$

のように^{上と}喰違った結果を与えている (Fig. 1c). 特に著しい

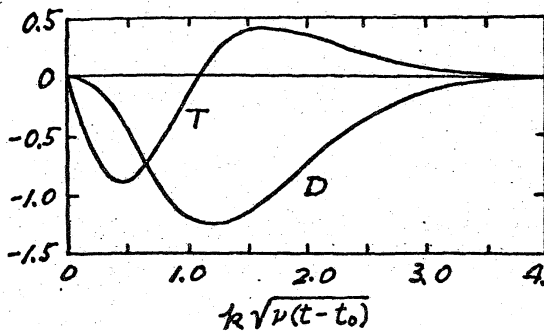


Fig. 2 低レイノルズ数乱流のスペクトル変化

T 無次元伝達関数
D 無次元消散関数

ことは, この期間を通じて波数空間内に消散スペクトルと同程度の大きさをもつ self-preserving なエネルギー伝達が存続してい

る点である (Fig. 2). 実験の條

件などからみて, 従来の測定と

の比較はなお検討の余地があり, また今の所 (13), (14) への確実な追証も理論的説明もみられないようであるが*, 低レイノルズ数乱流の問題に関して極めて注目される報告である。

2. Burgers モデルの場合

2.1 基礎方程式

前述のように, Navier-Stokes 方程式からみちびいた (9) は構造が極めて複雑なので, 定石に従いより簡単な Burgers 方程式'

* ただし (13) については Tan-Ling (1963) がほぼ同じ結果を得ている。なお, (14) の場合 λ は発散することには注意。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -R_0 u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

(無次元形)について R_0 が小さい場合を具体的に計算する. この試みは Kawahara (1968) のあと筆者 (1970, 1972) によって実行された. (15) に対し各次のエネルギー・スペクトルを (一様性仮定),

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(k; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u u' \rangle e^{-ikx} dx = \phi_{1,0}(k; t) + R_0 \phi_{1,1}(k; t) + \dots, \\ \phi_2(k, l; t) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u u' u'' \rangle e^{-i(kx + lx')} dx dx' \\ &= \phi_{2,0}(k, l; t) + R_0 \phi_{2,1}(k, l; t) + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

として逐次のスペクトル方程式に次々に代入すると, 順次

$$\text{第0近似: } \left(\frac{\partial}{\partial t} + k^2 \right) \phi_{1,0}(k; t) = 0. \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{第1近似: } \left(\frac{\partial}{\partial t} + k^2 \right) \phi_{1,1}(k; t) &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{2,0}(k, l; t) dl, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2) \right] \phi_{2,0}(k, l; t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{第2近似: } \left(\frac{\partial}{\partial t} + k^2 \right) \phi_{1,2}(k; t) &= ik \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{2,1}(k, l; t) dl, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2) \right] \phi_{2,1}(k, l; t) &= \frac{i}{2} [(k+l) \phi_{2,0}(k, l; t) \\ &\quad - k \phi_{2,0}(l, -k-l; t) - l \phi_{2,0}(-k-l, k; t)], \\ \text{さらに} \quad \phi_{2,0}(k, l; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{3,0}(k, l, m; t) dm + 2\phi_{1,0}(k; t)\phi_{1,0}(l; t), \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + 2(k^2 + kl + l^2 + km + lm + m^2) \right] \phi_{3,0}(k, l, m; t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

....

を得る. 問題はこれらに初期条件

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,0}(k; 0) &= \phi_1(k), & \phi_{1,S}(k; 0) &= 0, \\ \phi_{2,0}(k, l; 0) &= \phi_2(k, l), & \phi_{2,S}(k, l; 0) &= 0, \\ &\dots & & \end{aligned} \right\} (S=1, 2, \dots) \quad (20)$$

のもとで上から解いて行くことである。

2.2 解の実例

事柄をオ2近似までに限れば、いくつか特定の初期分布についてすべての k, t に対する厳密解を得ることかできる。代表的な例をあげると、

$$1^\circ \quad \phi_1(k) = 2k^2 e^{-k^2/\sqrt{\pi}}, \quad \phi_2(k, l) = 0 : \quad (21)$$

初期エネルギー-伝達率の場合で、オ2近似はいわゆる準正規分布理論の結果に一致する。解は、

エネルギー-スペクトル；

$$\phi_{1,0}(k; t) = 2k^2 e^{-2k^2(t+\frac{1}{2})/\sqrt{\pi}}. \quad (22)$$

$$\phi_{1,1}(k; t) = 0. \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(k; t) = k^2 \left[\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-2k^2(t+\frac{1}{4})} + \frac{1}{\sqrt{2(t+1)}} e^{-\frac{3}{2}k^2(t+\frac{1}{3})} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2t+1}} \left\{ 2e^{-2k^2(t+\frac{1}{2})} - 2e^{-k^2(\frac{3t^2+4t+1}{2t+1})} - \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-k^2(t+\frac{1}{2})} \right\} \right] / \sqrt{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

エネルギー-減衰；

$$\overline{u^2} = (2t+1)^{-\frac{3}{2}} + R_0^2 \left[\frac{1}{2} (4t+1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} (2t+1)^{-2} - \frac{3t+2}{(3t^2+4t+1)^{3/2}} \right]. \quad (25)$$

$$2^\circ \quad \phi_2(k, l) = 2i \sqrt{\frac{2}{\pi}} kl(k+l) e^{-2(k^2+kl+l^2)} :$$

初期エネルギー-伝達—初期非正規性—の効果とよえる。このときエネルギー-スペクトルのオ1近似は；

$$\phi_{1,1}(k; t) = k^2 \left[\frac{1}{\sqrt{t+1}} e^{-\frac{3}{2}k^2(t+1)} - e^{-2k^2(t+\frac{3}{2})} \right]. \quad (26)$$

(22)~(26)のグラフやその他の例は筆者(1970, 1972)にゆずる。

2.3 レイノルズ数展開の問題点

上のような級数解に伴う困難は、さきに筆者(1972')が指摘した。簡単にいうと、

1° 紫外発散: $t \neq 0, k \rightarrow \infty$ または $k \neq 0, t \rightarrow \infty$ のとき

$$|\phi_{1,1}(k;t)/\phi_{1,0}(k;t)| \rightarrow \infty, |\phi_{1,2}(k;t)/\phi_{1,0}(k;t)| \rightarrow \infty \text{ 等}, \quad (27)$$

2° 赤外発散: $t \rightarrow \infty$ のとき \bar{u}^2 は R_0 に依存し、終期解 ($R_0 = 0$) に漸近しない (式(25)参照),

の2点である。これらはいずれも初期分布の形にかかわらず一般的に示すことができる。

1° については、オ1近似の場合、(18)を書き直すと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2k^2\right)\phi_{1,1}(k;t) = ik \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(k,l) e^{-2(k^2+kl+l^2)t} dl = e^{-\frac{3}{2}k^2t} F(k;t), \quad (28)$$

ただし

$$F(k;t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_2(k, l - \frac{k}{2}) e^{-2l^2t} dl \quad (29)$$

となり、(28)の右辺は自由解 $\propto e^{-2k^2t}$ よりも slowly decaying なの2°, $\phi_{1,0}(k;t) = \phi_1(k) e^{-2k^2t}$ の方が $\phi_{1,1}(k;t)$ より早く減衰する。

オ2近似の場合は、(19)で $\phi_{2,1}$ -方程式右辺オ2項 $\phi_{2,0}(l, -k-l;t) = 2\phi_{1,0}(l;t)\phi_{1,0}(k+l;t) = 2\phi_1(l)\phi_1(k+l) e^{-2\{l^2+(k+l)^2\}t}$ による $\phi_{1,2}(k;t)$ への寄与を求めると、若干の計算によって

$$\phi_{1,2}(k;t) \sim \frac{k^2}{8} [G_0(k;t) e^{-2k^2t} - 2G_2(k;t) e^{-\frac{3}{2}k^2t} + G_0(k;t) e^{-k^2t}], \quad (30)$$

ただし、

$$G_n(k;t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-nl^2t}}{(l^2 - \frac{k^2}{4})^2} \phi_1(l - \frac{k}{2}) \phi_1(l + \frac{k}{2}) dl. \quad (31)$$

したからって、 $\phi_{1,2}(k;t)$ には $\phi_{1,0}(k;t)$ よりも減衰のおそい項が含まれる*。要するに、波数 k に寄与するすべての k について積

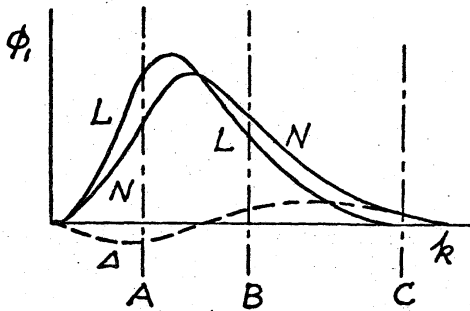


Fig.3 エネルギー輸送効果 (模式図)
L 線型解, N 非線型解
Δ エネルギー輸送量

分するとよに生じる事情であ
って、非線型性のもつ本質的
なものといわなければならな
い。Fig.3はこれを模式的に示
す。非線型効果は線型解 L か
らエネルギー Δ を輸送して非

線型解 N の分布に移すか、そのときの輸送量 $\Delta = N - L$ は L の
エネルギーから小さくない波数 A, B 等では微少な摂動であって
も、波数 C のように事実上 L が 0 であるような所ではむしろ
 $\Delta \gg L$ で、もはや小さな摂動とは見なせないであろう。これが
摂動展開の破綻すること物理的には不思議ではない。

20はスペクトルの原点附近に関連する問題で *permanence of*
big eddies の破れを示唆する。勿論1次元的なBurgers流れと非
圧縮流体のNavier-Stokes流れ(1,2参照)では事情もちかい、ま
た終期の減衰が R_0 に依存してはいけないう理由も特にな
いけれども、摂動解の性格としてなお検討が必要である。

非線型問題では単純なパラメータ展開によって全変域で有

* $\psi_{2,0}(k,l;t), \psi_{2,0}(-k-l,k;t)$ の寄与は問題にならない。また、(29)
と(31)の F, G_n は一般に k, t の代数関数である((30)は常に収束)。

効な近似が得られないことも稀ではないが、乱れの場合に関する研究はまだ十分でないように思われる。

2.4 ストークス型近似

ここで用いた逐次近似は、非線型項をまったく無視した極限から出発するという意味で、おそい流れに対するストークス型近似に相当する。そこで直接もとの方程式(15)に従って考えてみよう。そのために u のフーリエ変換 v を

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(k, t) e^{ikx} dk \quad (32)$$

によって導入し^{*}、(15)を波数空間で書けば、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + k^2 v = -i R_0 k v * v. \quad (33)$$

ただし

$$a * b = \int_{-\infty}^{\infty} a(l) b(k-l) dl \quad (34)$$

は合成積である。 v についてレイノルズ数級数

$$v = v_0 + R_0 v_1 + R_0^2 v_2 + \dots \quad (35)$$

を仮定して(33)に代入すると、

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + k^2 v_0 = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + k^2 v_1 = -ik v_0 * v_0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + k^2 v_2 = -2ik v_0 * v_1, \quad (38)$$

...

*厳密にはフーリエ・スチールチェス積分で表わされるが、当面はフーリエ積分で代用しても支障は起らない。

を得る。

第0近似(36)の解は、 $v_0(k, 0) \equiv V_0(k)$ とおいて、

$$v_0(k, t) = V_0(k) e^{-k^2 t}. \quad (39)$$

これを(37)の右辺に用いると、

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + k^2 v_1 = -i e^{-\frac{k^2}{2} t} U_0; \quad U_0(k; t) = k \int_{-\infty}^{\infty} V_0\left(\frac{k}{2} + l\right) V_0\left(\frac{k}{2} - l\right) e^{-2l^2 t} dl$$

となり、この方程式は $k^2 t \gg 1$ に対し漸近解

$$v_1(k, t) \sim V_1(k, t) e^{-\frac{k^2}{2} t} \quad (40)$$

をもつ。そこで

$$V_1(k, t) = i k \int_{-\infty}^{\infty} V_0\left(\frac{k}{2} + l\right) V_0\left(\frac{k}{2} - l\right) \frac{e^{-2l^2 t}}{\left(\frac{k^2}{4} - l^2\right)} dl \quad (41)$$

は一般に k, t の代数関数である ($V_0(0) = 0$ を仮定)。同様にして各次の近似の主要項を拾うと、

$$v_0 \sim V_0 e^{-k^2 t} + R_0 V_1 e^{-\frac{k^2}{2} t} + R_0^2 V_2 e^{-\frac{k^2}{3} t} + \dots \quad (42)$$

の形であって、 V_0, V_1, V_2, \dots はすべて代数関数だから、2・3・1°と同じ意味で右辺の級数は発散する。

あるいは、いわゆる相互作用表示

$$v(k, t) = e^{-k^2 t} w(k, t) \quad (43)$$

を用い、従属変数を w に変換すると、

$$a \circ b = \int_{-\infty}^{\infty} a\left(\frac{k}{2} + l\right) b\left(\frac{k}{2} - l\right) e^{-2l^2 t} dl \quad (44)$$

と書いて, (33)は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -i R_0 k e^{\frac{k^2}{2}t} w \circ w \quad (45)$$

となる。右辺に $e^{\frac{k^2}{2}t}$ の因子を含んだこの形は, $R_0 \ll 1$ としても単純パラメータ展開が不適当であることを端的に示している。

2.5 おさらい

結局以上の考察から, Kraichnan(1967)が予想したような $R_0 = 0$ におけるレイノルズ数展開の特異性は少なくとも1次元モデルでは確かに存在することが明らかとなった。したがって, 1で提起した大域構造と減衰終期の問題を再検討するためにも, 低レイノルズ数乱流に伴う非線型性について Navier-Stokes 方程式自身に関する吟味とより多くの実験事実の集積が望まれる。

References

- Batchelor, G.K. (1946) Proc. Roy. Soc. A186, 480.
 Batchelor, G.K. (1953) The theory of homogeneous turbulence. Camb. Univ. Press, Chap. 5.
 Batchelor, G.K.-Proudman, I. (1956) Phil. Trans. A248, 369.
 Batchelor, G.K.-Townsend, A.A. (1948) Proc. Roy. Soc. A194, 527.
 Birkhoff, G. (1954) Comm. Pure Appl. Math 7, 19.
 Chandrasekhar, S. (1950) Phil. Trans. A242, 557.
 Deissler, R.G. (1958) Phys. Fluids 1, 111.
 Deissler, R.G. (1960) Phys. Fluids 3, 176.
 Karman, Th. v. (1937) J. Aero. Sci. 4, 131.
 Karman, Th. v.-Howarth, L. (1938) Proc. Roy. Soc. A164, 192.
 Kawahara, T. (1968) J. Phys. Soc. Japan 25, 892.
 Kraichnan, R.H. (1967) Symp. Dynamics of Fluids and Plasmas. Acad. Press, 239.
 Lin, C.C. (1948) Proc. Nat. Acad. Sci. USA 34, 230.
 Ling, S.C.-Huang, T.T. (1970) Phys. Fluids 13, 2912.
 Loitsiansky, L.G. (1939) Rep. Centr. Aero. Hydrodyn. Inst. Moscow #440.

- Millionshtchikov, M. (1939) C.R.Acad.Sci.URSS 22, 231.
Monin, A.S. (1964) Prikl. Mat. Mex. 28, 389.
Ohji, M. (1963) 九大応力研所報 21号, 57.
Ohji, M. (1970) 信州大工紀要 29号, 31.
Ohji, M. (1972) 信州大工紀要 33号, 37.
Ohji, M. (1972') 第4回乱流シンポジウム, 東大宇宙研 51.
Phillips, O.M. (1956) Proc.Camb.Phil.Soc. 52, 135.
Proudman, I.-Reid, W.H. (1954) Phil.Trans. A247, 163.
Saffman, G.P. (1967) J.Fluid Mech. 27, 581.
Tan, H.S.-Ling, S.C. (1963) Phys.Fluids 6, 1693.
Taylor, G.I. (1937) J.Aero.Sci. 4, 311.